Chapitre 4 : Dynamique du pt matériel

I. Introduction

* C'est l'étude du mvt du pt mat en relation avec les causes de ce mvt.
* Elle repose sur 3 principes ; ennoncés par le physicien "Newton" au 17ème siècle.
  - Principe de l'action et la réaction.
  - " " l'inertie
  - " fond de la dynamique (P.F.D)

Commençons par étudier les concepts de masse et de Forces

II - Eléments cinétiques d'un pt mat :

1 - Masse d'un pt mat :

* C'est une grandeur physique qui caractérise l'inertie d'un corps (c.à.d : sa resistance à # modification de son mvt)
* La masse est de tant plus grande que le corps s'oppose au mvt elle est representé par réel scalaire noté m son unité en SI est : kg
* Elle est indépendante de l'état du mvt d'un corps

Note : A ne pas confondre la masse d'un objet et son poids.

* Le Poids $\vec{P}$ est une force due principalement à l'action qu'exerce le champ gravitationelle.

2 - Quantité de mvt

Exemple : Si on un camion et une voiture se déplacent à la m̂ vitesse $\vec{v}$ ils heurtent un obstacle => dégats produits par le camion ≠ dégats produits par la voiture.

* La vitesse à elle seule est insuffisant pour expliquer les conséquences du mvt.

=> Introduction du vect $\vec{p}$: Vect de qté de mvt donné par $\vec{p} = m.\vec{v}$

* $\vec{p}$ est caractérisé par :
  - pt d'app : La pos du pt mat
  - direction : celle de $\vec{v}$
  - Sens : celui de $\vec{v}$
  - norme : $\|\vec{p}\| = p = m.v$



- La qté du mvt est une grandeur physique qui lie la masse d'un corps à son mvt (décrit par $\vec{v}$)

- $\vec{p}$ dépend du refferentiel considéré pour l'étude du mvt

3. moment cinétique d'un pt mat M :

- Désignons par O un pt fixe d'un ref ou le pt M de masse m se déplace avec une vitesse $\vec{v}$. Le moment cinétique de M par rapport à O est noté $\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

utilité : il est intéressant lorsqu'on étudie les mvts de rotation d'un pt mat.

- $\vec{\sigma}_O$ dépend aussi du réf considéré pr l'étude

- On définit aussi le moment cinétique par rapport à un axe (Δ) de vect unitaire $\vec{u}$ par :

$\vec{M}_{(\Delta)}(M) = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_O(M)$ (O est un pt de (Δ))

Exemple : Calcule du mvt cinétique . En C. Cartésiens $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$$\vec{\sigma}_O(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (y\dot{z} - \dot{y}z)\vec{i} + (z\dot{x} - \dot{z}x)\vec{j} + (x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{k}$$

- En C. polaires :

$\vec{OM} = r\vec{e_r} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_O(M) = r\vec{e_r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$\vec{\sigma}_O(M) = r^2\dot{\theta}\vec{e_z} \Rightarrow \|\vec{\sigma}_O(M)\| = r^2\dot{\theta}$

4. Énergie cinétique :

- c'est une grandeur physique scalaire positive noté E_c et donne par $E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$

- c'est l'énergie que possède un corps grâce à son mvt

- Si le corps est immobile $\Rightarrow V = 0 \Rightarrow E_c = 0$

- Si $V \uparrow \Rightarrow E_c \uparrow$

- Son unité est : Joule (J).



III . Notion de force:

*C'est une grandeur vectorielle qui caractérise # intéraction capable de déplacer et/ou de le déformer.

* le vect $\vec{F}$ est caractérisé par: - point d'app : c'est le point du solide ou s'exerce la force. (En méca du pt mat le pt d'app ne se propose)

- drection: droite qui support le vect $\vec{F}$.

- sens : c'est l'un des 2 sens du pt mat à l'objet qui exerce la force.

- module: Intensité de $\vec{F}$ (N)

Rq : si le pt mat M est soumis à plusieurs forces $\vec{F_i}$ $(i=1; \ldots; n)$

=> on dit que M est soumis à la résultante $\vec{F}$, donné par:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

a- Nature de force:

- on distingue les forces de contact et les forces à distance

*Forces à distance: ses actions ne nécessite pas que les 2 corps soit en contact et s'exerce sur l'ensemble du corps. (on dit qu'ils sont repartis en volume). Ex : forces electriques magnétique ...

*Forces de contact: Elles necessitent le contact entre les 2 objets on dit qu'elles sont reparties en surface. Exemples: la réaction d'un support tension d'un fil.

b- Exemples des forces:

i/ Force à dist: Poids d'un objet $\vec{P}$

* $\vec{P}$ est caractérisé par:

- direction: Tjrs verticale

- Sens: Tjrs ver le bas.

- pt d'app: le centre de gravité d'un objet.

- Intensité : $P = m.g$ (g: champ de pesanteur)

$g = G.\frac{M_{Terre}}{R^2_{Terre}}$ (à la surface de la terre)

A une longitude z $g = G.\frac{M_{Terre}}{(R_T+z)^2}$

$G = 6,67.10^{-11}$ (S I)

G: cte gravitationelle

ii/ Ex. de forces de contact :

1 - Réaction d'un solide sur un solide : $R_{B/M}$

• On a $\vec{R}_{B/M} = \vec{N} + \vec{T}$

(M un objet en mvt sur B)

$\vec{N}$: c l'action normale permanente de B sur M.

- point d'app : pt de contact
- direction : ⊥ au support B.
- Sens : de B vers M.

$\vec{T}$: c la force de frottement solide-solide (B sur M)

- direction : c'est la dir du dép de M sur B (Tg au supp)
- Sens : opposé à celui du dép.
- pt d'app

Rq : • Si M est immobile sur B $\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{N}$

• Si la surface lisse ⇒ pas de force $\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_{B/M} = \vec{N}$.

2 - Tension d'un fil.

*

• Direction : celle du fil

Sens : du solide ver le fil

pt d'app : le point d'attache du solide au fil

Rq : Si le fil est inextensible la Tension $\vec{T}$ est la m en tt point du fil.

$\vec{T}$ est appelé force de liaison.

3. Force de rappel : Force exercé par le re

ressort

⇒ l_0 : longeur à vide du ressort.

l : long du ressort après l'attachement du ressort.

⇒ $\Delta l = \Delta l'$.



$\Delta l = l - l_0$ l'allongement du ressort.

Force de rappel est $\vec{F} = -K \Delta l$.

on $\Delta l > 0$ si le ressort est étiré

$\Delta l < 0$ si le ressort est compressé

Les caractéristiques de $\vec{F}$:

- direction : celle du ressort
- Sens : - Si le ressort est allongé, le sens sera du solide vers le ressort
  - Ds le sens $\vec{F}$ sera du ressort vers le solide.
- pt de rappel : pt d'attache entre le ressort et le solide.
- le module $F = K . \Delta l$.

où K = la cte de raideur du ressort (caract du ressort)

4 - Force exercée par un fluide sur un objet (Poussée d'Archimède)

Ses caractéristiques :

- direction : vertical (fluide ex : liquide)
- sens : vers le haut
- Pt d'app : En général c'est le centre de la surface immergée dans le liquide.
- Module : $\Pi = m_{\text{fluide déplacé}} \cdot g$ $(\vec{\Pi} = -\vec{P}$ du fluide dép$)$

IV - Principe d'inertie :

1 - Enoncé et déf :

immobile

en mvt réctiligne uniforme

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$$

- Ce principe exprime le fait que dans un réffer donné, tt corps immobile ou en mvt réctiligne uniforme n'est pas soumis à aucune force (ou à des forces qui se compensent)



* Le réf dont lequel ce principe est vérifié ~~est appelé~~ appelé réf "Galilien" ou réf d'inertie.

* Tout réf R_1 en mvt de translation rectiligne uniforme par % à un reff Galilien est aussi Gallilien.

2) Quelques réfs usuels.

* En réalité, le fait de considérer un réf Gallileen est une approximation.

i/ Réf de Copernic (Rc):

* Origine : le barcentre du système solaire qui est le soleil
* Axes: Sont dirigés vers 3 étoiles suffisament éloigné pour pouvoir être considérés comme fixe.

Rc

* Rc est considéré galléliеn en 1ère approximation

ii/ Réf géostationnaire (RG)

* Origine : Centre de la terre.
* Axes : gardent une direction fixe % a ceux du Rc.

RG

Rc

En réalité, RG est en translation élliptique % à Rc cependant, l'acceleration de la terre autour du soleil est faible si on la néglige, on considère R_G un réf Gallélien avec une très bonne approximation.

Rq : RG est utilisé ds le cas pour l'étude du mvt des satellites

iii/ Réf terrestre R (réf du laboratoire)

* Origine : un pt A de la surface de la terre.

* axes sont { Ox : suivant un méridien du nord vers le sud
Oy : Parallèle (ouest - est).
Oz : suivant la verticale du lieu.

* Du fait de la rot de la terre autour d'un axe (axe pôle Nord - Pôle sud)

R_T n'est pas un réf galliléen

=> On le considère galliléen que lorsque la durée de l'expérience est << à 24h (durée de rot de la terre)

ou tt simplement l'effet de la rot est négligeable.

Exemple : L'étude du mvt de la lune autour de la terre est étudié % au réf R_G (et non R_T).

=> dans R_G la trajectoire de la lune est presque un rayon 384000 km durée d'un tour 27,3 jours.

Rq : R_T est considéré galliléen avec un bonne approximation

Exemple : Considérons une voiture qui roule avec une vitesse uniforme sur une ligne droite et une bille deposée sur son tableau de bord.

* Sys étudié : Bille.
* Réf lié à la voiture (R')
* Bilan des forces : $\vec{P}$ poids de la bille
$\vec{R}$ du tableau de bord.

* On considère tjs R_T : réf galliléen, R' est en mvt rectiligne et uniforme % R_T

=> R' est un réf galliléen et principe d'inertie est bien vérifié.

=> la bille reste immobile ($\vec{P} = -\vec{R}$: $\vec{P}$ compense $\vec{R}$).

Rq : Si la voiture accelère => mvt non uniforme % R_T => la bille ne reste plus immobile

C/C : R' n'est plus considéré gallelien le P.I n'est pas vérifié.

2_ Si la voiture est en rot uniforme => on aura m̂ remarque d'avant

V. Principe fondonmental de la dynamique (P.F.D)

1) P.F.D dans un réf Gallelien (R_G)

* Soit un pt mat M en mvt ds un réf, Gallelien. R_G de vitesse $\vec{v}$
* la particule M de masse m.
* Expérimentalement, on observe que l'app d'une force $\vec{F}$ sur M accelère le mvt de ce point, l'accélération $\vec{\gamma}$ se produit dans le m̂ sens que $\vec{F}$.

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}_{R_G}(M).$$

ou m coefficient de proportionalité de $\vec{F}$ % $\vec{\gamma}$.

Rq : on sait que $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\vec{F} = m.\vec{\gamma}_{R_G}(M) = m \frac{d\vec{v}_{R_G}(M)}{dt}$$

$$= \frac{d(m\vec{v}_{R_G}(M))}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$: Théo de la qté du mvt → (P.F.D dans R_G)

2) P.F.D ds un réf non gallelien (R_G) :

Soit R_G réf absolu

R' réf relatif

* R' est en mvt qq % à R_G

=> R' est non gallelien

d'après la loi de comp des accélérations

$$\vec{\gamma}_{R_G}(M) = \vec{\gamma}_{R'}(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M).$$

$$\Rightarrow m\vec{\gamma}_{R'}(M) = m\vec{\gamma}_{R_G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M) - m\vec{\gamma}_c(M)$$

$$m\vec{\gamma}_{R'}(M) = \sum \left(\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)$$

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$ force d'inertie d'entrainnement

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$ force de coriolis

Cas particulier

Cas d'un mvt de R'/Rg de translation $\Rightarrow \vec{\Omega}_{R'/Rg} = \vec{0}$

$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{Rg}(O')$ $(\vec{\gamma}_a(O'))$ $= 0$.

P.F.D $\Rightarrow m\vec{\gamma}_{R'}(M) = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\gamma}_{Rg}(O')$

Cas d'un mvt de trans rectiligne uniforme

$V(O') = cte \Rightarrow \vec{V}'(O') = cte$ Mvt rect. uniforme

$\Rightarrow \vec{\gamma}_{Rg}(O') = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_c = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{F}_{ie} = \vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

$m\vec{\gamma}_{R'}(O) = \sum \vec{F}_{ext}$ (P.F.D d'un Réf gal).

R' est alors un Réf galilien (c'est évident car R' est en mvt de trans rectiligne uniforme % à Rg)

Cas d'un pt en équilibre ds un Réf non gal:

P.F.D $m\vec{\gamma}_{R'}(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$.

L'équilibre du pt : $\vec{V}_r = \vec{V}_{R'}(M) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{\gamma}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

aussi $\vec{V}_{R'}(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_{R'}(M) = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}}$$

Pour un pt en équilibre ds un réf non galilien

V - Principe d'action et de réaction

1 - Ennoncé :

* L'action est tjrs égale et opposé à la réaction, càd les actions des 2 corps l'un sur l'autre sont identiques en module et en direction et de sens opposé

Exemple : Intéractions électrostatiques/gravitationelles

Conséquences:

* Supposon 2 corps (1) et (2)

(1) exerce sur (2) $\vec{F}_{1/2}$.

(2) " " (1) $\vec{F}_{2/1}$

$\Rightarrow \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Si ds un Réf gal, les 2 corps snt en mvt

$$\Rightarrow P.F.D : \begin{cases} \frac{d\vec{p}_{(2)}}{dt} = \vec{F}_{1/2} \\ \frac{d\vec{p}_{(1)}}{dt} = \vec{F}_{2/1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{p}_{(2)} + \vec{p}_{(1)})}{dt} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_{(1)} + \vec{p}_{(2)} = cte.$$

C/C : La qté de mvt d'un système de 2 corps, isolés, soumis à leur seuls actions mutuelles est une cte vectorielle

2 - Exemples d'intéractions

a - Int. Eléctrostatique :

* on considère deux charges : q_1 x A_1 ; q_2 x A_2

Exerce sur q_2 : $\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\|A_1A_2\|^3}$

Carach de $\vec{F}_{1/2}$:

- point d'app : A_2
- direction : Droite passante par A_1 et A_2 (ou $A_2 \to A_1$ selon les signes de q)
- Sens : de A_1 à A_2 ; module : $F_{1/2} = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 A_1A_2}$

* $\vec{F}_{2/1}$: Force elect exercé de q_2 sur q_1

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{A_2A_1}}{\|A_2A_1\|^3}$$

* Cas de 2 charges de m signe ($q_1 > 0$ et $q_2 > 0$)

$\vec{F}_{2/1}$ ← q_1 x A_1 q_2 x A_2 → $\vec{F}_{1/2}$ $q_1 = q_2 = q$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = r\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{1/2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

et $\vec{F}_{2/1} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ Il s'agit d'une répulsion.



• cas de 2 charges de sens opposés $q_1 = q$ et $q_2 = -q$

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (-r\vec{u}) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Il s'agit d'une attraction.

b. Intéraction gravitationelle :

× Cette Intéraction intervienne que si les masses des objets sont très importantes

Enoncé : Deux corps considérés ponctuels de masse m et m' séparés par une distance R exercent l'une sur l'autre des forces attractives c'est la loi d'attraction gravitationelle

$$F = F' = G \frac{m \cdot m'}{R^2}$$

où G est la cte de gravitation universelle

$\vec{F}_{M_1/M_2}$:
- pt d'app : position de M_2
- Direction : Droite passante par M_1 et M_2.
- Sens : $M_2 \rightarrow M_1$
- Module : $F_{M_1/M_2} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$

$\vec{F}_{M_2/M_1}$:
- pt d'app : M_1
- Direction : Droite (M_1M_2)
- Sens : $M_1 \longrightarrow M_2$.

Exemple cas de la lune et la terre :

$$\vec{F}_{T/L} = F_{L/T} = G \cdot \frac{M_T M_L}{d^2}$$

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.

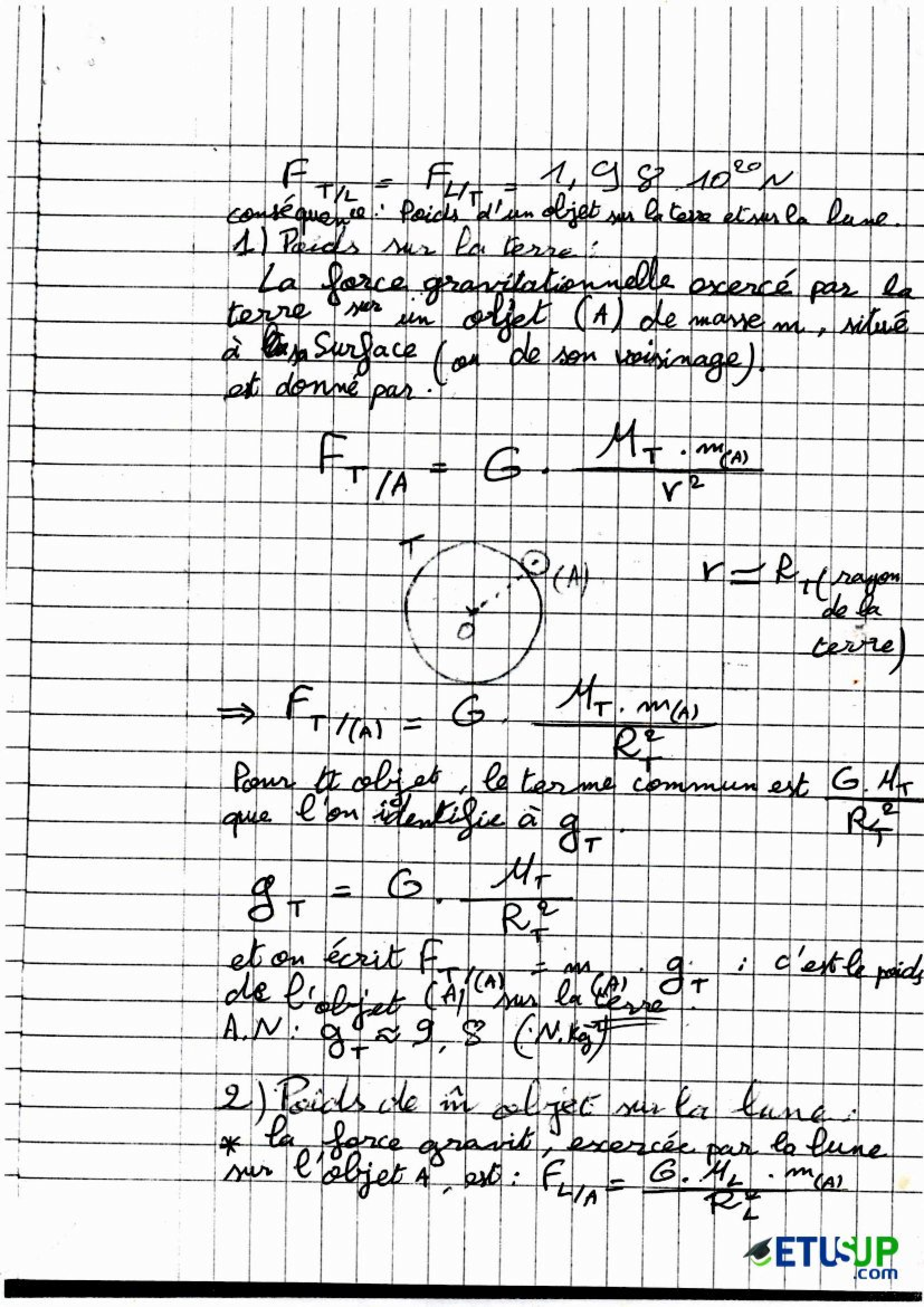
$M_L = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg.

$d = 3,84 \cdot 10^{5}$ Km.

$G \simeq 6,67 \cdot 10^{-11}$ (SI).

$F_{T/L} = 1,98 \cdot 10^{20}$ (N).





$$F_{T/L} = F_{L/T} = 1,98 \cdot 10^{20} N$$

conséquence : Poids d'un objet sur la terre et sur la lune.

1) Poids sur la terre :

La force gravitationnelle exercé par la terre sur un objet (A) de masse m, situé à sa surface (ou de son voisinage) est donné par :

$$F_{T/A} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_{(A)}}{r^2}$$

$r = R_T$ (rayon de la terre)

$$\Rightarrow F_{T/(A)} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_{(A)}}{R_T^2}$$

Pour tt objet, le terme commun est $\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$ que l'on identifie à g_T.

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

et on écrit $F_{T/(A)} = m_{(A)} \cdot g_T$: c'est le poids de l'objet (A) sur la terre.

A.N : $g_T \approx 9,8$ ($N.Kg^{-1}$)

2) Poids de un objet sur la lune :

* la force gravit. exercée par la lune sur l'objet A est : $F_{L/A} = \frac{G \cdot M_L \cdot m_{(A)}}{R_L^2}$

$\Rightarrow$ On identifie le terme : $G \cdot \frac{M_L}{R_L^2}$ par g_L.

$\Rightarrow F_{L/A} = m_{(A)} \cdot g_L$; Poids de l'objet A ~~où $g_L \simeq 1,6$ (N.Kg)~~ sur la lune.

où $g_L \simeq 1,6 \ (N.Kg^{-1})$

$\Rightarrow \frac{g_T}{g_L} \simeq 6,1$; L'objet (A) de masse m est environ 6 fois plus léger sur la lune plus que la terre.

Un Objet de masse m n'a pas le m̂ poids ~~ou~~ sur la terre que sur la terre.

C/c

VI. Exemples d'Application du P.F.D :

La puissance caractérisée par ce principe réside lorsque les forces exercées sur le système a étudié sont connus.

L'application du P.F.D. donne le système d'eq. suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m \cdot \ddot{x} \\ f_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m \ddot{y} \\ f_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = m \ddot{z} \end{cases}$$

La résolution de ces équations donnent les éq. horaires du mvt et donc . la trajectoire effectuée par la particule en mvt.

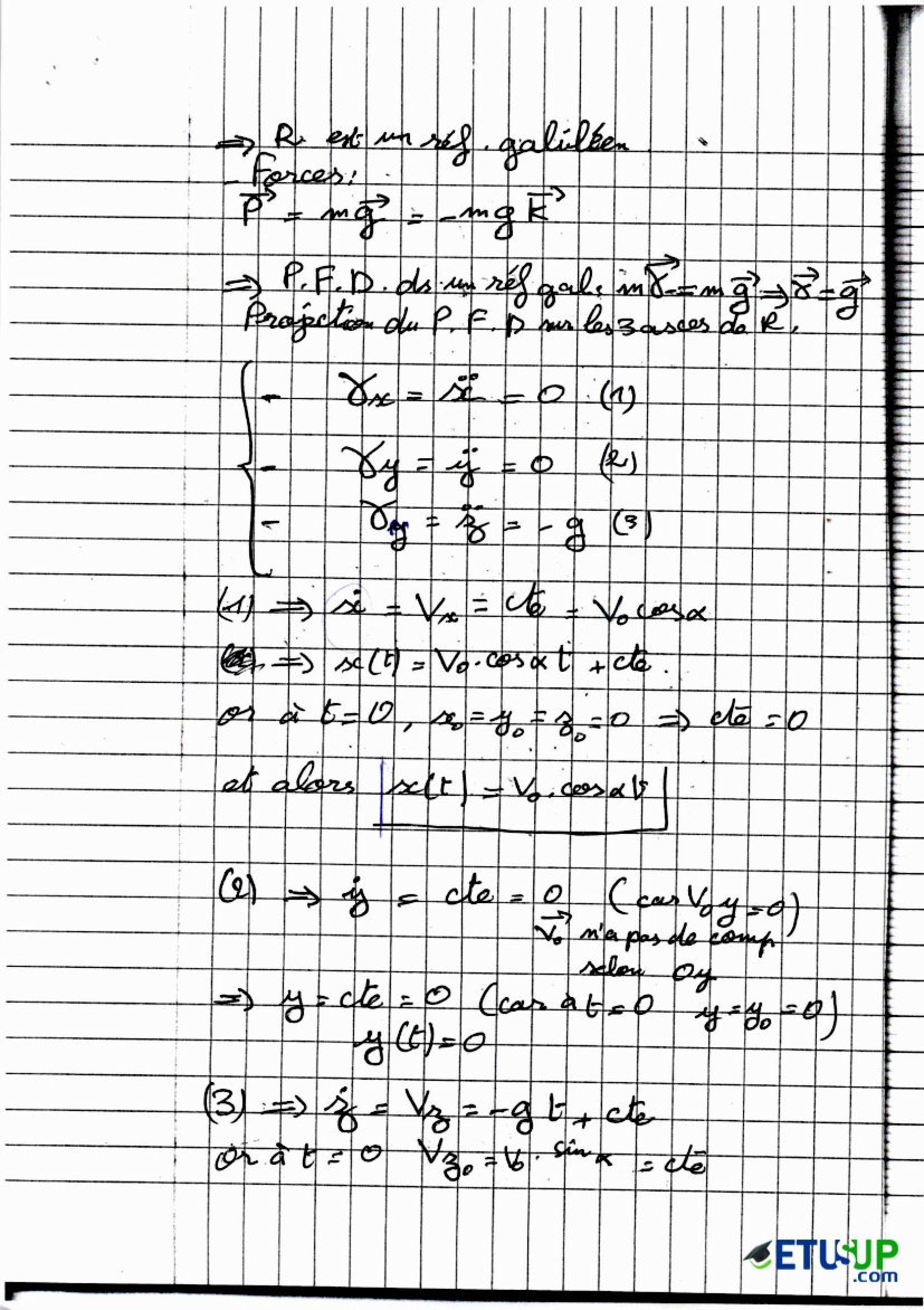
- Sys étudié
- Réf d'étude
- Bilan des force

VI - lancement d'un projectile dans le vide :

On considère le vide afin de ne pas faire intervenir la résistance de l'air ⇒ le projectile est soumis uniquement à son poids .

* On suppose que le projectile est lancé avec une vitesse initiale ($\vec{V_0}$).
$(\vec{V_0}, \vec{Ox}) = \alpha$

- Sys étudié : Projectile de masse m.
- Réf : R (O, x, y, z) lié au sol.



⇒ R est un réf. galiléen

- Forces :

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$

⇒ P.F.D. ds un réf gal : $m\vec{\gamma} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{g}$

Projection du P.F.D sur les 3 axes de R.

$$\begin{cases} \gamma_x = \ddot{x} = 0 & (1) \\ \gamma_y = \ddot{y} = 0 & (2) \\ \gamma_z = \ddot{z} = -g & (3) \end{cases}$$

(1) ⇒ $\dot{x} = V_x = cte = V_0 \cos\alpha$

⇒ $x(t) = V_0 . \cos\alpha \, t + cte$.

or à $t = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ⇒ $cte = 0$

et alors $\boxed{x(t) = V_0 . \cos\alpha \, t}$

(2) ⇒ $\dot{y} = cte = 0$ (car $V_{0y} = 0$, $\vec{V_0}$ n'a pas de comp selon Oy)

⇒ $y = cte = 0$ (car à $t = 0$ $y = y_0 = 0$)

$y(t) = 0$

(3) ⇒ $\dot{z} = V_z = -gt + cte$

or à $t = 0$ $V_{z_0} = V_0 \sin\alpha = cte$

$\Rightarrow \dot{z} = -gt + V_0 \sin\alpha$.

$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t + cte$

or à $t=0$ $z = z_0 = 0 \Rightarrow cte = 0$

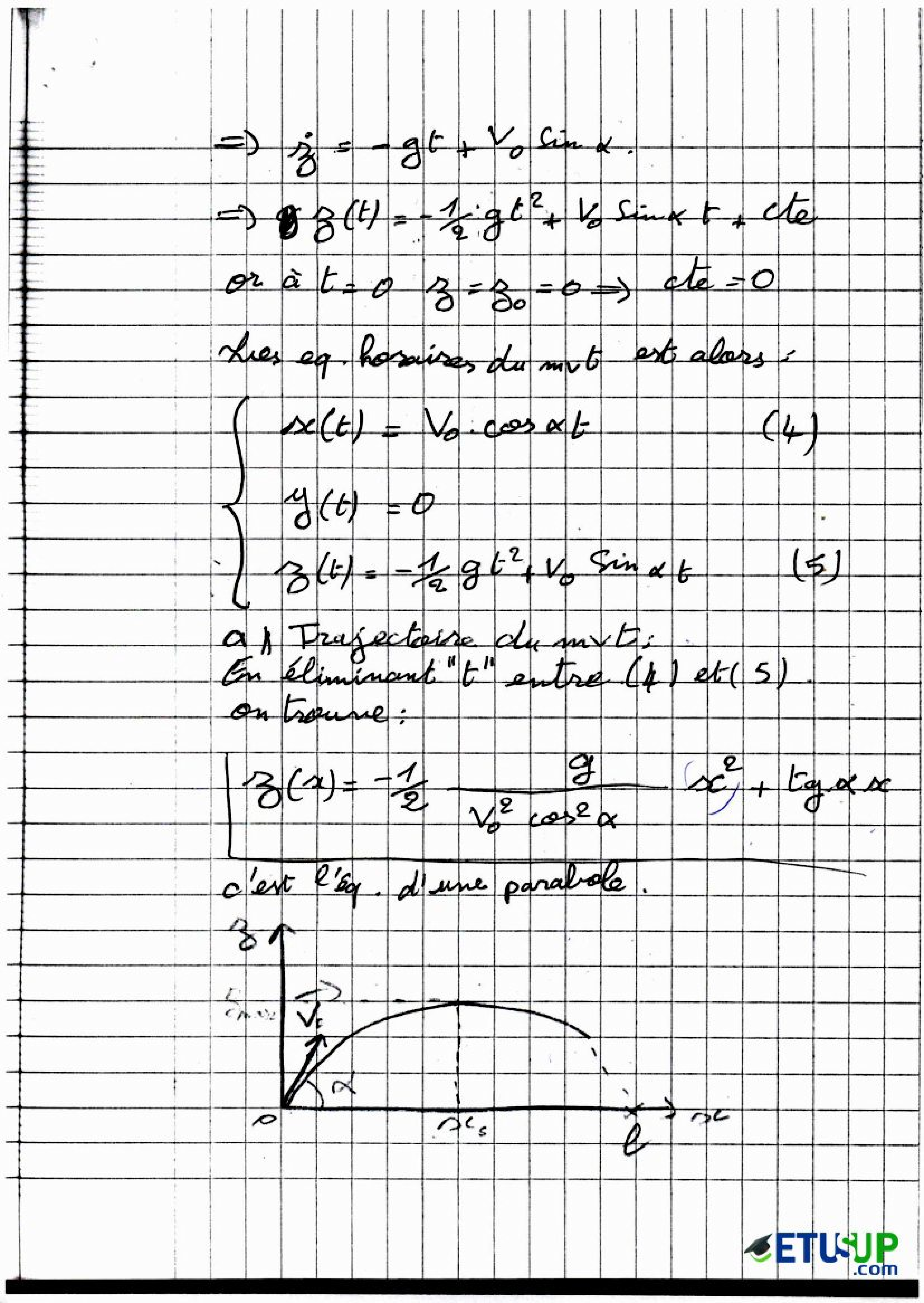
Les eq. horaires du mvt est alors :

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cdot \cos\alpha \, t & (4) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t & (5) \end{cases}$$

a) Trajectoire du mvt :
En éliminant "t" entre (4) et (5)
on trouve :

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + tg\,\alpha \, x$$

c'est l'éq. d'une parabole.



b – l'altitude de max de la trajectoire :

On cherche pour une vitesse donnée V_0 sous un angle α. $z_{max} = ?$

Pour cela, on calcule $\frac{dz}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 0 \Longleftrightarrow x_s = \frac{V_0^2 \cos^2\alpha}{g} \cdot tg\alpha ;$$

abscisse de z_{max}

$$z_{max} = z(x_s) = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$: le sommet de la parabole

z_{max} dépend de V_0 et de α.

c – Portée de la parabole :

c'est le cas où : $z = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + tg\alpha \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$x = l = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha V_0^2}{g}$$

$$l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$; portée de la parabole.

pour un V_0 donné, la portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha = \pi/2 \Rightarrow \alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow \ell_{max} = \frac{V_0^2}{g}$$

d - Parabole de sûreté :

c'est la courbe "enveloppe" de toutes les trajectoires possibles d'un projectile lancé depuis l'origine avec une vitesse donnée.

Une trajectoire passe par un point $Q(z_c, x_c)$, alors :

$$z_c = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2\alpha} x_c^2 + tg\,\alpha\, x_c$$

En posant : $tg\,\alpha = u$ (l'inconnu c'est α)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha\, tg^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha (1 + u^2) = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+u^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}(1+u^2)x_c^2 + u\,x_c = z_c$$

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2} x_c^2 u^2 + x_c u - \left(\frac{g}{2V_0^2}x_c^2 + z_c\right) = 0$$

$$\Delta = x_c^2 - \frac{2 g x_c^2}{V_0^2}\left(z_c + \frac{g}{2V_0^2}x_c^2\right.$$

cette éq. admet des racines réelles si $\Delta \geq 0$, $\Leftrightarrow \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g x_c^2}{2V_0^2} \geq z_c$

la résolution est possible si :

$$z_c \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g x_c^2}{2V_0^2}$$

des points accessibles par le projectile du plan (O, x, z) pour une vitesse donnée, sont donc située en dessous de la courbe courbe.

$$z = \frac{-g}{2V_0^2} x_c^2 + \frac{V_0^2}{2g}$$: c'est la parabole de sûreté

P. de sûreté

z

$\frac{V^2}{2g}$

l_{max}

x

VI - 2 - Mvt d'une charge ds un champ électrique uniforme :

En absence d'un champ magnétique la particule est soumise à :

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

$\vec{P} \ll \vec{F} \Longrightarrow$ P.F.D : $m\vec{\gamma} = \vec{F_e}$

$\Rightarrow m.\vec{\gamma} = q\vec{E}$

supposons qu'a l'instant $t = 0$. la particule est lancée d'un point O, du plan Oxy avec une vitesse $\vec{V_0}$, fesant un angle α avec l'axe Ox, et le champs $\vec{E}$ est colinéaire et du m̂ sens qu'a l'axe OZ.

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{q}{m}\vec{E}$.

Du faite que ce problème est analogue a celui du lancement de projectile dans le vide.

m̂ raisonement fait, on trouve.

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + V_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'Éq. de la trajectoire est :

$$z = \frac{qE}{2mV_0^2\cos^2\alpha} x^2 + tg\alpha\, x$$

c'est une parabole.


ETUSUP.com